

Una instalación está alimentada por la red eléctrica de 220 V, 50 Hz. La misma toma una potencia activa $P = 4\text{kW}$ y una reactiva $Q = 3\text{kVA}$, estando la corriente atrasada respecto a la tensión de alimentación. Determinar:

- Los componentes equivalentes considerando al circuito de tipo serie.
- El componente que debe conectarse en paralelo con la instalación para llevar el factor de potencia a 0.85 inductivo.

Solución

- El circuito se modela como una impedancia equivalente $\mathbf{Z} = R + jX$.

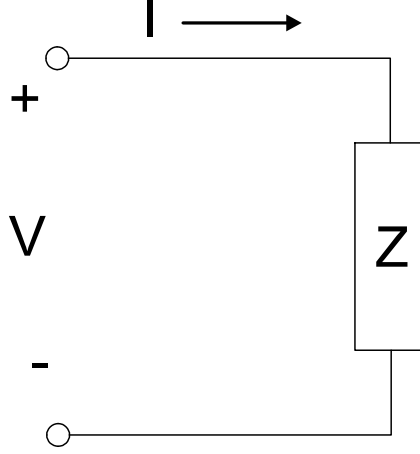


Figura 1: parte a)

Calculemos P y Q utilizando la potencia compleja $\mathbf{S} = \mathbf{I}_{ef}^* \cdot \mathbf{V}_{ef} = P + jQ$.

De acuerdo a la ley de Ohm,

$$\mathbf{I}_{ef} = \frac{\mathbf{V}_{ef}}{\mathbf{Z}}$$

de manera que

$$\mathbf{S} = \left(\frac{\mathbf{V}_{ef}}{\mathbf{Z}} \right)^* \cdot \mathbf{V}_{ef} = \frac{|\mathbf{V}_{ef}|^2}{\mathbf{Z}^*} = \frac{|\mathbf{V}_{ef}|^2}{R - jX} = \frac{|\mathbf{V}_{ef}|^2}{R^2 + X^2} (R + jX)$$

de donde vemos que

$$P = \text{Re}(\mathbf{S}) = \frac{|\mathbf{V}_{ef}|^2}{R^2 + X^2} R \quad (1)$$

y

$$Q = \text{Im}(\mathbf{S}) = \frac{|\mathbf{V}_{ef}|^2}{R^2 + X^2} X \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para obtener R y X .

Dividiendo entre si las ecuaciones queda

$$\frac{P}{Q} = \frac{R}{X} \Rightarrow X = R \frac{Q}{P} \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (2) resulta

$$Q = \frac{|\mathbf{V}_{ef}|^2}{R^2 + R^2 \left(\frac{Q}{P} \right)^2} R \frac{Q}{P} = \frac{|\mathbf{V}_{ef}|^2}{R \left[1 + 1 \left(\frac{Q}{P} \right)^2 \right]} \frac{Q}{P} = \frac{|\mathbf{V}_{ef}|^2 PQ}{R [P^2 + Q^2]}$$

de donde

$$R = \frac{|\mathbf{V}_{ef}|^2 P}{[P^2 + Q^2]} = \frac{220^2 \cdot 4 \cdot 10^3}{(4 \cdot 10^3)^2 + (3 \cdot 10^3)^2} = \frac{220^2 \cdot 4}{25 \cdot 10^3} = 7.744 \Omega \quad (4)$$

Reemplazando (4) en (3) resulta

$$X = R \frac{Q}{P} = \frac{|\mathbf{V}_{ef}|^2 Q}{[P^2 + Q^2]} = \frac{220^2 \cdot 3}{25 \cdot 10^3} = 5.808 \Omega$$

b) El factor de potencia (fp) de esta impedancia es

$$fp_0 = \cos(\varphi_z) = \cos \left[\tan^{-1} \left(\frac{X}{R} \right) \right] = \cos \left[\tan^{-1} \left(\frac{Q}{P} \right) \right] = \cos [\tan^{-1} (0.75)] = 0.8$$

Para lograr un factor de potencia $fp = 0.85$ debemos conectar un capacitor en paralelo con \mathbf{Z} .

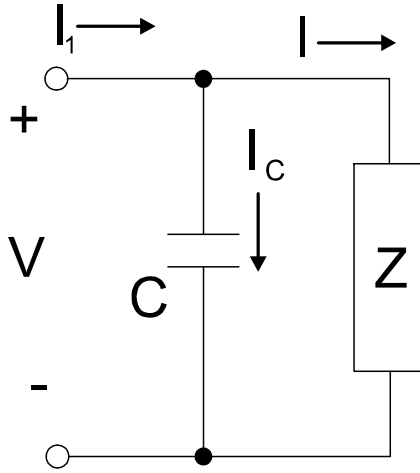


Figura 2: parte b)

Podemos obtener P y Q utilizando la potencia compleja $\mathbf{S} = \mathbf{I}_{ef}^* \cdot \mathbf{V}_{ef} = P + jQ$. Notemos que la corriente sobre \mathbf{Z} es la misma que antes de agregar el capacitor, pues la tensión sobre esta impedancia sigue siendo \mathbf{V} . Entonces (ya no escribo el subíndice ef , pero se entiende que son todos valores eficaces),

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{I}_1^* \cdot \mathbf{V} = (\mathbf{I}_C^* + \mathbf{I}^*) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I}_C^* \cdot \mathbf{V} + \mathbf{I}^* \cdot \mathbf{V} \quad (5)$$

En (5), vemos que $\mathbf{I}^* \cdot \mathbf{V} = \mathbf{S}$ es la misma potencia compleja que en la parte a), por lo cual podemos escribir

$$\mathbf{I}^* \cdot \mathbf{V} = P + jQ \quad (6)$$

El otro término en (5) se puede escribir como

$$\mathbf{S}_C = \mathbf{I}_C^* \cdot \mathbf{V} = \left(\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_C} \right)^* \cdot \mathbf{V} = \frac{|\mathbf{V}|^2}{jX_C} = -j \frac{|\mathbf{V}|^2}{X_C} \quad (7)$$

Volviendo a (5) con (6) y (7)

$$\mathbf{S}_1 = -j \frac{|\mathbf{V}|^2}{X_C} + P + jQ = P + j \left(Q - \frac{|\mathbf{V}|^2}{X_C} \right)$$

donde vemos que el efecto de agregar el capacitor C es disminuir el valor de la potencia reactiva

$$Q_1 = Q - \frac{|\mathbf{V}|^2}{X_C}$$

sin alterar la potencia activa

$$P_1 = P$$

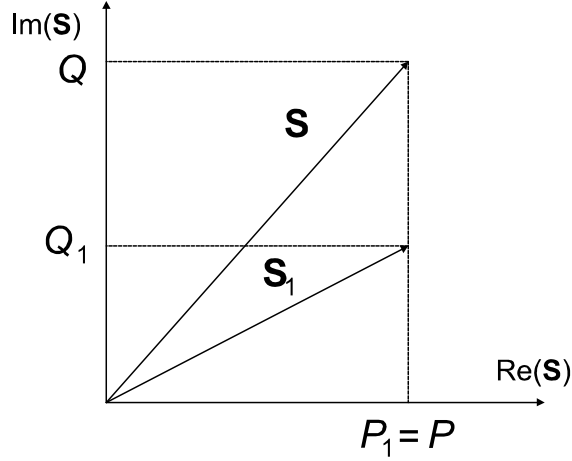


Figura 3

De esta manera se logra disminuir $\varphi_z = \varphi_s$ (aumentando entonces $\text{fp} = \cos(\varphi)$) sin alterar el valor de P . Obtenemos ahora el valor de C :

Por un lado se tiene

$$\varphi_z = \cos^{-1}(0.85)$$

y por otro

$$\tan(\varphi_z) = \tan(\varphi_s) = \frac{Q - \frac{|\mathbf{V}|^2}{X_C}}{P}$$

de manera que

$$\frac{|\mathbf{V}|^2}{X_C} = Q - P \cdot \tan(\varphi_z) \Rightarrow X_C = \frac{|\mathbf{V}|^2}{Q - P \cdot \tan(\varphi_z)}$$

o bien

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{|\mathbf{V}|^2}{Q - P \cdot \tan(\varphi_z)} \Rightarrow C = \frac{Q - P \cdot \tan(\varphi_z)}{\omega |\mathbf{V}|^2}$$

Reemplazando valores

$$C = \frac{3 \cdot 10^3 - 4 \cdot 10^3 \cdot \tan[\cos^{-1}(0.85)]}{2\pi 50 \cdot 220^2} = 0.34 \mu\text{F}$$